СЕКЦІЯ 3.
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 62-50:519.7

Баранюкова І. С., аспірант, Жоголева Н. В., к.ф-м.н., науковий співробітник відділу прикладної механіки

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МЕРЕЖІ ОСЦИЛЯТОРІВ

Інститут Прикладної Математики і Механіки НАН України, м. Слов'янськ

У багатьох прикладних додатках для опису складних нелінійних коливальних процесів використовується модель, яка складається з одного або декількох пов'язаних між собою осциляторів Ван дер Поля або деяких їх модифікацій [1]. В даній роботі побудовано нелінійний ідентифікатор, який формує асимптотичні оцінки невідомих для одного автономного осцилятора, а далі отриманий результат поширено на систему пов'язаних осциляторів. Використано метод інваріантних співвідношень [2], який призначено для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою.

1. Визначення характеристик осцилятора ван дер Поля. Синтез додаткових співвідношень.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \mu\left(1 - x_1^2\right)x_2 - \omega^2 x_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Метою є ідентифікація параметрів μ і ω за відомою інформацією про рух. Такою інформацією є вихід – функція часу $y(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням значень виходу. Далі відомим будемо вважати будь-яке рішення задачі Коші $\xi(t, \xi_0)$

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t), x_2(t)), \xi(0) = \xi_0 \in R^p, \qquad (2)$$

для будь-якої системи диференціальних рівнянь розмірності $p \geq 1$, праві частини $U(\xi, x_1(t), x_2(t))$ якої задовольняють достатнім умовам теореми існування і єдиності рішень для $t \in [0, \infty)$.

Задача 1. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів μ і ω системи (1) за відомими значеннями виходу $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Для розв'язку використовуємо метод синтезу інваріантних співвідношень спеціального виду [1]. Ідея методу полягає в динамічному розширенні вихідної системи диференціальних рівнянь (1) додатковими рівняннями (2), де p дорівнює 2 – числу невідомих (константи μ і ω). При цьому праві частини допоміжної системи $U\left(\xi, x_1, x_2\right)$ підбираються таким чином, щоб отримана розширена система диференціальних рівнянь (1), (2) допускала на своїх рішеннях інваріантні співвідношення

$$G_i(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \mu, \omega) = 0, i = 1, 2, \tag{3}$$

Співвідношення виду (3) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} G_1 &= \mu - \xi_1(t) - \Phi(x_1(t), x_2(t)) = 0, \\ G_2 &= \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi(x_1(t), x_2(t)) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\xi_i(t), i = 1, 2$ —розв'язки допоміжного диференціального рівняння (2), а функції $\Phi\left(x_1, x_2\right), \Psi\left(x_1, x_2\right), U\left(\xi, x_1, x_2\right)$ безперервно диференціюються по своїм аргументам. Якщо ці функції будуть обрані так, що співвідношення (4) виявляться інваріантними на даному рішенні системи (1), (2), то тоді невідомі параметри μ і ω можуть бути знайдені безпосередньо з цих рівностей.

Твердження 1. Для будь-яких диференційованих за своїми аргументами функцій $\Phi\left(x_1, x_2\right), \Psi\left(x_1, x_2\right)$ можна підібрати праву частину $U\left(\xi, x_1, x_2\right)$ в системі диференціальних рівнянь (2) так, що рівності (4) будуть виконуватись тотожно на деяких рішеннях розширеної системи диференціальних рівнянь (1), (2) .

Твердження 2. Вибір вільних функцій $\Phi(x_1, x_2)$, $\Psi(x_1, x_2)$ у вигляді

$$\Phi(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)\frac{x_2^2}{2}, \quad \Psi(x_1, x_2) = -x_1 x_2. \tag{5}$$

гарантує асимптотичну стійкість тривіального рішення системи

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= x_2(1 - x_1^2)\left[-x_2(1 - x_1^2)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -x_1\left[-x_2(1 - x_1^2)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким чином, співвідношення (4) і допоміжна система диференціальних рівнянь формує для системи (1) асимптотичний ідентифікатор.

Твердження 3. Для будь-якого нетривіального рішення $x_1(t), x_2(t)$ системи (1) і будь-якого початкового значення $\xi_1(0), \xi_2(0)$ в задачі Коші для допоміжної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= x_1 x_2^3 + x_1 x_2^2\left\{-x_1\left(\xi_2 - x_1 x_2\right) + \left[\xi_1 + \left(1 - x_1^2\right)\frac{x_2^2}{2}\right]\left(1 - x_1^2\right)x_2\right\}, \\ \dot{\xi}_2 &= x_2^2 + x_1\left\{-x_1\left(\xi_2 - x_1 x_2\right) + \left[\xi_1 + \left(1 - x_1^2\right)\frac{x_2^2}{2}\right]\left(1 - x_1^2\right)x_2\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

формули

$$\hat{\mu} = \xi_1(t) + \left(1 - x_1^2(t)\right)\frac{x_2^2(t)}{2}, \; \hat{\omega}^2 = \xi_2(t) - x_1(t)x_2(t) \tag{8}$$

визначають асимптотичні оцінки параметрів μ і ω^2 відповідно.

2. Система пов'язаних осциляторів.

Розглянемо систему, що складається з *n* пов'язаних між собою неідентичних осциляторів ван дер Поля

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= x_{i2}, \\ \dot{x}_{i2} &= \mu_i\left(1 - x_{i1}^2\right)x_{i2} - \omega_i^2 x_{i1} + F_i(t, x_{i1}, , x_{n2}), i = \overline{1, n} \end{aligned} \tag{9}$$

Тут змінні x_{i1} означають зміщення від власного положення рівноваги *i*-го осцилятора, x_{i2} – швидкість відповідного зміщення, функції $F_i(t, x_{11}, , x_{n2})$ формалізують зовнішній вплив і вплив зв'язків в мережі на динаміку *i*-го осцилятора, $i = \overline{1, n}$. У задачах наближеного моделювання коливань складних об'єктів за допомогою моделей виду (9) ці функції підбираються з різних міркувань і можуть не мати фізичного або механічного сенсу, описуючи, наприклад, односторонні зв'язки.

Задача 2. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів $\mu_i, \omega_i^2, i=\overline{1,n}$ системи (9) за відомими значеннями фазового вектору $x(t)=(x_{11}(t), x_{12}, , x_{n2}(t))$.

Твердження 4. Для будь-якого нетривіального рішення *x(t)* системи (9) і будь-якого початкового значення *ξ(0)* в задачі Коші для допоміжної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{i1} &= x_{i1}x_{i2}^3 + x_{i1}x_{i2}^2\left\{-x_{i1}(\xi_{i2}-x_{i1}x_{i2})+\left[\xi_{i1}+\left(1-x_{i1}^2\right)\frac{x_{i2}^2}{2}\right]\left(1-x_{i1}^2\right)x_{i2}+F_i\right\},\\ \dot{\xi}_{i2} &= x_{i2}^2 + x_{i1}\left\{-x_{i1}(\xi_{i2}-x_{i1}x_{i2})+\left[\xi_{i1}+\left(1-x_{i1}^2\right)\frac{x_{i2}^2}{2}\right]\left(1-x_{i1}^2\right)x_{i2}+F_i\right\},\end{aligned} \qquad (10)$$

формули

$$\widehat{\mu}_i=\xi_{i1}(t)+\left(1-x_{i1}^2(t)\right)\frac{x_{i2}^2(t)}{2}, \widehat{\omega}_i^2=\xi_{i2}(t)-x_{i1}(t)x_{i2}(t)$$

визначають асимптотичні оцінки параметрів $\mu_i, \omega_i^2, i=\overline{1,n}$.

3. Числове моделювання.

Числове моделювання здійснювалося для ланцюжка з трьох послідовно з'єднаних неідентичних осциляторів ван дер Поля

$$\dot{x}_{11}=x_{12}, \dot{x}_{12}=\mu_1(1-x_{11}^2)x_{12}-\omega_1^2x_{11}+F_1, \dot{x}_{21}=x_{22}, \dot{x}_{22}=\mu_2(1-x_{21}^2)x_{22}-\omega_2^2x_{21}+F_2, \qquad (11)$$
$$\dot{x}_{31}=x_{32}, \dot{x}_{32}=\mu_3(1-x_{31}^2)x_{32}-\omega_3^2x_{31}+F_3,$$

зв'язаних за допомогою пружних і дисипативних зв'язків:

$$F_1=\nu(x_{11}-x_{21})+\kappa(x_{12}-x_{22}), F_2=\nu(x_{21}-x_{11})+\nu(x_{21}-x_{31})+\kappa(x_{22}-x_{12})+\kappa(x_{22}-x_{32}),$$
$$F_3=\nu(x_3 1-x_2 1)+\kappa(x_3 2-x_2 2)$$

де ν – коефіцієнт жорсткості, κ – коефіцієнт дисипативного зв'язку. Вихід системи – вектор $y(t)=\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t)\right)$ отриманий в результаті числового розв’язку системи диференціальних рівнянь (11) у якій параметри μ_1, μ_2, μ_3 = 0.0, 2.0, 5.0, частоти $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ = 4.0, 9.0, 1.0, а параметри: ν = 1.2, κ= 0.3.

В даному випадку: $\xi_{i1}(0)=-2.0; \xi_{i2}(0)=-2.0, i=1,2,3.$

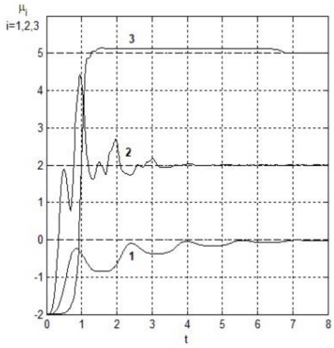

Рис. 1.а

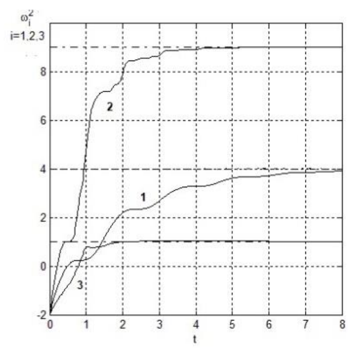

Рис. 1.б

На рис 1.*а* під номерами *і* = 1,2,3 зображено графіки функцій $\xi_{i1}(t)+\left(1-x_{i1}^2(t)\right)\frac{x_{i2}^2(t)}{2}$, які, відповідно до твердження 4, асимптотично прямують до шуканих значень параметрів $\mu_1=0.0, \mu_2=2.0, \mu_3=5.0$. На рис. 1.*б,* відповідно, зображено графіки функцій $\xi_{i2}(t)-x_{i1}(t)x_{i2}(t)$, які сходяться до шуканих значень $\omega_1^2=4.0, \omega_2^2=9.0, \omega_3^2=1.0$. Результати моделювання підтверджують працездатність запропонованої схеми розв'язання задачі ідентифікації.

Список літератури

1. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С. , Трубецков Д.И. , Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42.*
2. *Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.*
3. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69-76.*

УДК 004.89

Воронюк О. В., здобувач освіти,
Кульчицька О. Ю., здобувач освіти,
Баєв А. В., к. ф.-м. н., доцент кафедри прикладної математики

ПРОГНОЗУВАННЯ ЕПІДЕМІЙ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Донецький національний університет імені Василя Стуса

Сучасна медицина являє собою, в основному, експериментальну науку, де велику роль мають саме аналіз емпіричних даних. Детального вивчення різноманітних процесів у біосередовищах найбільш ефективним апаратом досліджень є математичне моделювання, адже експериментальні дослідження є досить обмеженими.

У даному дослідженні розглядається побудова математичної моделі епідемії інфекційної хвороби [1, 2], знаходиться розв’язок отриманої системи звичайних диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта, а також апроксимується функція динаміки процесу шляхом машинного навчання [3] на спостережених даних. Метою дослідження є створення системи прогнозування епідемії методами математичного моделювання та методами машинного навчання.

Авторами порівнюється аналітичне моделювання процесу та апроксимація процесу шляхом аналізу та обробки даних, отриманих експериментальним шляхом. У випадку аналітичного моделювання властивості та поведінка оригіналу описуються математичними залежностями, що власне і є предметом дослідження. Показано, що побудувати таку модель не завжди є можливим. В цих випадках обґрунтовано використання інтелектуального аналізу даних.