

1. Ethier J.T., Mullen G.L. Strong forms of orthogonality for sets of hypercubes. *Discrete Math.* 2012. Vol. 312, Iss. 12-13. P. 2050-2061.
2. Couselo E., Gonzalez S., Markov V., Nechaev A. Recursive MDS-codes and recursively differentiable quasigroups. *Discrete Math. Appl.* 1998. Vol. 8, Iss. 3. P. 217-246.
3. Sokhatsky F.M., Fryz I.V. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 2012. Vol. 53, №3. P. 429-445.
4. Fryz I.V. Orthogonality and retract orthogonality of operations. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.* 2018. №1(86). P. 24-33.

УДК 519.248

Цвик В.В., здобувач освіти,  
Крикун І.Г., к.ф.-м.н., доцент, доцент  
кафедри прикладної математики

## SIR-МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ ЕПІДЕМІЙ

*Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця*

**Вступ.** Інфекційні хвороби та їх спалахи у формі епідемій переслідують людство весь час існування. Тому питання моделювання динаміки розповсюдження інфекційних хвороб завжди було і буде актуальним. Пандемія ж коронавірусу, яка змінила життя всього людства, додатково підвищила наш інтерес до цього питання.

**Огляд останніх публікацій.** Одним з найефективніших підходів до аналізу динаміки складних систем є прийом, коли вся система розбивається на частини та при цьому задаються закони для швидкостей обміну речовиною між цими частинами. Ці частини цілого (наприклад, всієї популяції) отримали назву «компарменти» (від англ. compartment – комірка, обмежений простір), а такий прийом отримав назву «компарментальний аналіз».

Вперше компарментальний аналіз у вивченні динаміки поширення інфекційних хвороб було застосовано англійськими математиками Вільямом Кермаком та Андерсоном Маккендріком (1927, 1932). Подальші дослідження як правило використовують моделі Кермака – Маккендріка та їх узагальнення. Моделюванню динаміки епідемій інфекційних хвороб присвячено чимало недавніх публікацій, серед яких виділимо [1; 2]

**SIR-модель Кермака-Маккендріка.** Отже, першою компарментальною моделлю в динаміці інфекційних хвороб була модель Кермака-Маккендріка (1927), в якій люди ділилися на три групи: тих, хто може захворіти, хворих і тих, хто одужав або має імунітет.

В подальшому такі моделі отримали назву SIR-моделі від англійської аббревіатури SIR = Susceptible-Infected-Recovered, від розбиття всієї популяції на три частини:  $S$  (susceptible) – вразливі, тобто без імунітету до хвороби;

$I$  (infectious) – ті, що заразилися і розповсюджують інфекцію, і  $R$  (recovered) – ті, хто одужав і/або має імунітет.

Розглянемо SIR-модель Кермака-Маккендріка детально. Позначимо кількість осіб у частинах популяції  $S$ ,  $I$  та  $R$  у момент часу  $t$  через  $S(t)$ ,  $I(t)$  та  $R(t)$  відповідно.

В SIR-модель Кермака-Маккендріка є три припущення:

1. Хвороба поширюється у закритому середовищі; тобто немає еміграції чи імміграції, народжуваності чи смертності серед населення, так що загальна кількість населення залишається сталою  $K$  для всіх моментів часу  $t$ , тобто

$$S(t) + I(t) + R(t) \equiv K.$$

2. Кількість сприйнятливих осіб, що заражена інфікованою особою за одиницю часу в момент часу  $t$ , пропорційна загальній кількості сприйнятливих з коефіцієнтом пропорційності (коефіцієнтом передачі)  $\beta$ , відповідно загальна кількість новоінфікованих осіб протягом часу  $t$  дорівнює  $\beta S(t)I(t)$ .

3. Кількість осіб, що одужали за одиницю часу в момент часу  $t$  становить  $\gamma I(t)$ , де  $\gamma$  – коефіцієнт відновлення, і вважаємо, що особи, що одужали, набувають постійний імунітет.

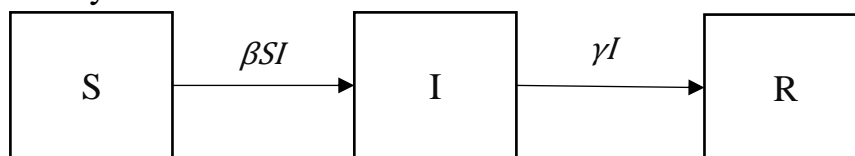


Рис. 1. Блок -схема SIR-моделі без життєвої динаміки.

Виходячи з цих припущень, блок-схема моделі наведена на Рис. 1, а відповідні диференціальні рівняння, що математично описують динаміку поширення інфекційного захворювання в популяції, наведені в системі

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases} \quad (1)$$

Оскільки рівняння для змінної  $R$  від'єднано від перших двох рівнянь системи (1), нам залишається лише розглянути систему

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \quad (2)$$

З системи (2) маємо

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S}. \quad (3)$$

де  $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$ .

Розв'язок рівняння (3) з початковим значенням  $(S_0, I_0)$  має вигляд

$$I - I_0 = -(S - S_0) + \rho \ln \frac{S}{S_0}. \quad (4)$$

Усі  $I(S)$ , визначені рівнянням (4), досягають максимуму в точці  $S = \rho$ . З графіків  $I(S)$  для різних початкових значень  $(S_0, I_0)$  випливає, що існує порогове значення  $\rho$  таке, що якщо початкова кількість сприйнятливих  $S(0) = S_0 > \rho$ , то кількість інфікованих збільшується; а якщо  $S(0) = S_0 < \rho$ , то кількість інфікованих зменшується.

Визначимо

$$R_0 = \beta \frac{1}{\gamma} S_0 = \frac{S_0}{\rho},$$

тоді можемо сказати, що епідемія поширюється при  $R_0 > 1$ , і згасає при  $R_0 < 1$ .

Зазначимо, що  $\gamma I(t)$  – це кількість осіб, що одужали за одиницю часу в момент часу  $t$ , тобто особи, які переміщуються із компартменту інфікованих  $I$  в момент часу  $t$ . Тобто після проміжку часу тривалістю  $1/\gamma$  всі інфіковані особи  $I(t)$  одужують. Отже,  $1/\gamma$  – це середня тривалість хвороби, а  $R_0 = \beta S_0/\gamma$  – це кількість осіб, інфікованих зараженою особою протягом усього періоду інфекції, коли всі особини в популяції сприйнятливі. Ця величина  $R_0$  визначає порогові значення для передачі захворювання. Кількість інфікованих зменшується, якщо  $R_0 < 1$ , і збільшується, якщо  $R_0 > 1$ . Тому для контролю за зростанням епідемії одним із ключових факторів є оцінка значення  $R_0$ , а потім зменшення його до  $< 1$ .

Оцінка значення  $R_0$  – завдання непросте на практиці, оскільки воно включає біологічні параметри, деякі з яких неможливо виміряти. Наведемо приклад оцінки  $R_0$  на підставі історичних відомостей.

**Історичний приклад.** Розглянемо спалах бубонної чуми в 1665–1666 роках в селі Ейам поблизу Шеффільда (Англія) [2, стор. 356–361]. Збережені записи свідчать про те, що початкова кількість сприйнятливих та інфікованих було 254 осіб та 7 осіб відповідно у середині травня 1666 року, і лише 83 особи вижили на середину жовтня 1666 року.

Отже, параметри SIR-моделі розвитку цієї епідемії можна оцінити так:  $S_0 = 254$ ,  $S_\infty = 83$  і  $K = 261$ , так що  $\rho = 153$  і  $R_0 = S_0/\rho = 1,66$ . Записи також показують, що період зараження становив 11 днів та

$$\beta = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{1}{11} * \frac{1}{153} = 0,000594 \left( \frac{1}{\text{день}} \right) = 0,01178 \left( \frac{1}{\text{місяць}} \right).$$

З (3) випливає, що кількість інфікованих  $I(S)$  досягає максимуму при  $S = \rho$ . Таким чином, з (4) ми оцінюємо кількість інфікованих на високому піку епідемії

$$I_m = I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln \frac{\rho}{S_0} =$$

$$= K - \rho(1 + \ln R_0) = 261 - 153(1 + \ln 1,66) = 31(\text{особа})$$

**Висновки.** Було розглянуто основні положення компартментальний аналіз та проаналізовано ідеї, що використовуються при побудові SIR-моделей та SIR-моделі Кермака-Маккендріка для опису динаміки розвитку епідемії

інфекційного захворювання. Також здійснені оцінки параметрів SIR-моделі Кермака-Маккендріка для певної історичної епідемії.

***Список літератури***

1. Ma Z., Li J. *Dynamical modeling and analysis of epidemics*. Singapore : World Scientific Publishing Co., 2009. 498 p.
2. Brauer F., Castillo-Chavez C., Castillo-Chavez C. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. New York : Springer, 2012. 508 p.