УДК 517.946

Андреєва Ю. А., здобувачка
Буряченко К. О., к. ф.-м. н., доцент

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГУ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДЛЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Вступ

Метою роботи є доведення аналогу принципу максимуму для рівнянь гіперболічного типу. Зокрема, його застосування для хвильового рівняння та до випадку рівнянь коливань з молодшим членом типу амплітуд.

Актуальність задачі полягає в тому, що принцип максимуму є дієвим інструментом для дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних. Як відомо з курсу задач математичної фізики, для рівнянь еліптичного та параболічного типу принцип максимуму є дослідженим фактом. Водночас для рівнянь гіперболічного типу класичний принцип максимуму не виконується.

Наразі в публікації Protter M., Weinberger H. [1] побудовано принцип максимуму в слабкому вигляді для хвильового рівняння, а для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та молодшими членами першого порядку. Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. [2] було доведено принцип максимуму для слабких розв'язків телеграфного рівняння у тривимірному просторі. Деякі з цих принципів були доведені для гіперболічних рівнянь другого порядку з молодшими членами в роботах Agmon S., Nirenberg L.[3], Clain S. [4]. У випадку періодичних розв'язків принцип максимуму є природним і був доведений Wang F., An Y.[5] і Li Y.[6] у зв'язку з існуванням та кратністю додатних періодичних розв'язків для нелінійної телеграфної системи.

Метою роботи є дослідження доведення аналогу принципу максимуму для рівнянь гіперболічного типу.

Основним завданням є отримання аналогу принципу максимуму для хвильового рівняння з молодшим членом нульового порядку.

1. Аналоги припципу максимуму для хвильових рівнянь.

Принцип максимуму не виконується для розв'язків гіперболічних рівнянь і нерівностей. У найпростішому випадку хвильове рівняння з двома незалежними змінними має вигляд:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \qquad \textbf{(1.1)}$$

Легко побачити, що максимум для розв'язку u в множині D може знаходитися у внутрішній точці. Наприклад, функція

$$u = sin\,x \cdot sin\,t$$

задовільняє рівнянню коливанню струни та досягає максимуму у внутрішній точці $(\pi/2, \pi/2)$.

Щоб знайти можливий принцип максимуму, ми досліджуємо природу правильно поставлених граничних та початкових умов задач для гіперболічних рівнянь.

Хвильове рівняння (1.1) описує поперечний рух однорідної струни під час натягу. Розглянемо задачу Коші: ми задаємо u та $\partial u/\partial t$ при $t = 0$ на деякому інтервалі $2\alpha \leq x \leq 2\beta$.

Ми маємо показати, що тоді рух однозначно визначається в межах так званого характеристичного трикутника, тобто трикутник, сторони якого складаються з інтервалу $2\alpha \leq x \leq 2\beta$, $t = 0$ та сторони утворюють кут $\pi/4$ з віссю Ox і проходить через точки $(2\alpha, 0)$ $(2\beta, 0)$ (див. Рис.1). Демонстрація полягає в отриманні явного розв'язку цієї задачі методом Рімана.

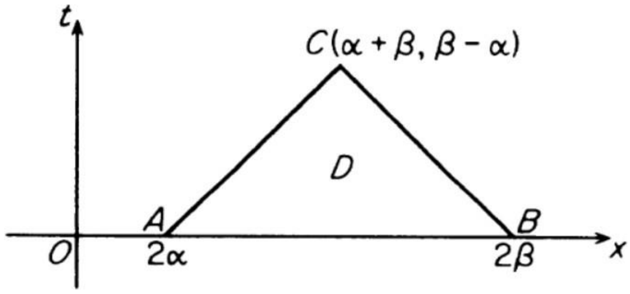

Рис. 1: Характеристичний трикутник

Нехай u двічі неперервно диференційована функція і

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt}$$

задано в трикутнику D з вершинами $(2\alpha, 0)$, $(2\beta, 0)$ і $(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$.

Розглянемо вираз

$$\iint_D L[u]dxdt = \iint_D (u_{xx} - u_{tt})dxdt.$$

Застосовуючи теорему Стокса, отримаємо:

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx + \int_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Оскільки $dx = -dt$ вздовж відрізка BC і $dx = dt$ вздовж CA, маємо:

$$\iint\limits_{D} L[u]dxdt = \int\limits_{A}^{B} u_t dx - \int\limits_{B}^{C} (u_x dx + u_t dt) + \int\limits_{C}^{A} (u_x dx + u_t dt).$$

Тепер можемо проінтегрувати два останні інтеграли, і ми отримаємо:

$$\iint\limits_{D} L[u]dxdt = \int\limits_{A}^{B} u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C)$$

або

$$u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int_A^B u_t dx - \frac{1}{2}\iint_D L\,[u]dxdt.\quad \textbf{(1.2)}$$

Таким чином, значення u в C однозначно визначається в $u(2\alpha, 0)$, $u(2\beta, 0)$, $\partial u/\partial t$ для $2\alpha < x < 2\beta, t = 0$ і $L[u]$ в D.

Зокрема, ми бачимо, що якщо

$$L[u] \geq 0 \text{ в } D \qquad \textbf{(1.3)}$$

та

$$\partial u/\partial t \leq 0, \;\; 2\alpha < x < 2\beta, \qquad \textbf{(1.4)}$$

то

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)].$$

Якщо ми візьмемо будь-яку точку C' в межах характеристичного трикутника ABC, ми можемо побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник $A'B'C'$ з A' і B' на вісі Ox і прямим кутом в C'. Тоді ми знаходимо таким же чином, що

$$u(C') \leq \frac{1}{2}[u(A') + u(B')].$$

З цієї нерівності видно, що значення u в трикутнику ABC не мо- жуть перевищувати максимального значення u на початковому відрізку прямої AB. Таким чином, якщо u задовольняє (1.3) і (1.4), її максимум на $D \cup \partial D$ повинен досягатись на прямій AB.

Цей результат є слабким принципом максимуму, оскільки він не дає жодної інформації про те, чи може функція досягти свого максимуму у внутрішній точці. Власне кажучи, функція

$$u = \cos x \cdot \cos t$$

задовольняє $L[u] = 0$; також

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Свій максимум u досягає на $(0, 0)$ і $(2\pi, 0)$, але він також досягається на (π, π). Співвідношення (1.2) показує, що якщо функція $u_t(x, 0)$ є строго від' ємною на AB або якщо $L[u] > 0$ в D, то значення u в C строго менше, ніж середнє значення A і B . У цій ситуації ми бачимо, що якщо M позначає максимум u на AB, то $u < M$ в D.

Аналогічний результат можна отримати для рівняння з молодшими членами типу амплітуд:
Теорема.
Якщо

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u \geq 0 \text{ в } D$$

та $u(x,0) \leq M < 0$, $u_t(x,0) \leq 0$, тоді $u < 0$ в D.

Висновки. Таким чином, в роботі отримані слабкі принципи максиму для хвильового рівняння, а також для хвильового рівняння з молодшими членами типу амплітуд.

Список використаних джерел

1. *H. Protter M., Weinberger H., – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967. – pp. 195–239.*
2. *G. Stampacchia, Equations elliptiques du second ordre `a coefficients dis- ´ continus, S´eminaire Jean Leray, no.3, 1–77, 1963–1964.*
3. *H. Darcy, Les fontaines publique de la ville Dijon, V. Dalmont, Paris, 1856, pp. 305-401.*
4. *L. S. Leibenzon, The motion of a gas in a porous medium, Complete works, vol 2, Acad Sciences URSS, Moscow, 1953. First published in Neftanoe I slantsevoe Khozyastvo, 10, 1929, and Neftanoe khozyastvo, 8-9, 1930.*
5. *M. Muscat, The flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill, New York, 1937.*
6. *Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena **II**, Academic Press, New York, 1966.*
7. *J. Boussinesq, Recherches th´eoriques sur l'´ecoulement des nappes d'eau infiltr´es dans le sol et sur le d´ebit de sources. Comptes Rendus Acad. Sci. / J. Math. Pures Appl, 10 (1903/04), pp. 5–78.*
8. *J.L. Vazquez, The Porous Medium Equation: Mathematical Theory, Oxford University Press, 624 pages, 2007.*

УДК 517.946

Белік А. О., здобувачка
Буряченко К. О., к. ф.-м. н., доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТАМПАК'Я ДО РІВНЯННЯ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця