від' ємною на AB або якщо $L[u]\ >\ 0$ в D, то значення u в C строго менше, ніж середнє значення A і B . У цій ситуації ми бачимо, що якщо M позначає максимум u на AB, то $u\ <\ M$ в D.

Аналогічний результат можна отримати для рівняння з молодшими членами типу амплітуд:
Теорема.
Якщо

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u \geq 0 \text{ в } D$$

та $u(x,0) \leq M < 0$, $u_t(x,0) \leq 0$, тоді $u\ <\ 0$ в D.

Висновки. Таким чином, в роботі отримані слабкі принципи максиму для хвильового рівняння, а також для хвильового рівняння з молодшими членами типу амплітуд.

Список використаних джерел

1. *H. Protter M., Weinberger H., – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967. – pp. 195–239.*
2. *G. Stampacchia, Equations elliptiques du second ordre `a coefficients dis- ´ continus, S´eminaire Jean Leray, no.3, 1–77, 1963–1964.*
3. *H. Darcy, Les fontaines publique de la ville Dijon, V. Dalmont, Paris, 1856, pp. 305-401.*
4. *L. S. Leibenzon, The motion of a gas in a porous medium, Complete works, vol 2, Acad Sciences URSS, Moscow, 1953. First published in Neftanoe I slantsevoe Khozyastvo, 10, 1929, and Neftanoe khozyastvo, 8-9, 1930.*
5. *M. Muscat, The flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill, New York, 1937.*
6. *Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena **II**, Academic Press, New York, 1966.*
7. *J. Boussinesq, Recherches th´eoriques sur l'´ecoulement des nappes d'eau infiltr´es dans le sol et sur le d´ebit de sources. Comptes Rendus Acad. Sci. / J. Math. Pures Appl, 10 (1903/04), pp. 5–78.*
8. *J.L. Vazquez, The Porous Medium Equation: Mathematical Theory, Oxford University Press, 624 pages, 2007.*

УДК 517.946

Белік А. О., здобувачка
Буряченко К. О., к. ф.-м. н., доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТАМПАК'Я ДО РІВНЯННЯ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Вступ

Метою роботи є застосування методу Стампак'я в дослідженнях якісних властивостей розв'язків рівняння пористого середовища, зокрема, доведено теорему єдиності слабкого розв'язку першої мішаної задачі:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m \text{ в } Q_T, \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ в } \Omega, \end{cases}$$

де $m > 1$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, та його застосування в прикладних задачах. Основою цього методу є Теорема 1.1 Стампак'я для монотонної і незростаючої функції, а також її варіант узагальнення, що представлений у Теоремі 1.2.

Актуальність задачі полягає у тому, що існує ряд фізичних застосувань, в яких рівняння пористого середовища є основою для описання процесів. Найвідоміші із них описання руху ізоентропічного газу через пористе середовище, описані H. Darcy [2] та L. S. Leibenzon [3]. Теплове випромінювання в плазмі, описане Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer [4]. Дослідження інфільтрації підземних вод, що належить J. Boussinesq [5]. Крім математичної фізики, рівняння пористого середовища використовується для дослідження розповсюдження в'язких рідин та теорії граничного шару.

Основним завданням є використання методу Стампак'я та дослідження якісних властивостей розв'язків рівняння пористого середовища.

У роботах J. L. Vazquez [6], представлено математичну теорію рівняння пористого середовища:

$$\partial_t u = \Delta(u^m), \qquad m > 1$$

J. L. Vazquez [6], L. S. Leibenzon [3] описували модель руху газу через пористе середовище. Основна ідея полягає у тому, що цей потік газу може бути сформульований з макроскопічної точки зору, при змінних ρ - щільність, p - тиск, та V - швидкість, які є функціями з простору x з часом t. Ці величини повинні бути пов'язані такими законами:

(i) баланс маси – рівняння неперервності в механіці рідини:

$$\varepsilon\rho_t + \nabla(\rho V) = 0,$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$ - пористість середовища, а V – оператор дивергенції.

(ii) закон H. Darcy[2] – емпіричний закон, що описує динаміку потоків через пористі середовища:

$$\mu V = -k\nabla p,$$

де μ – в'язкість рідини, k – проникність середовища.

(iii) рівняння стану:

$$p = p_0 p^{\gamma},$$

де γ – показник політропії, p_0- еталонний тиск.

Параметри в'язкості рідини, пористості середовища, проникності та ідеального тиску вважаються у ідеальних газів додатніми і постійним, але для узагальнення, *(i)-(iii)* зводиться до такого вигляду:

$$\rho_t = c\Delta(\rho^m), \text{ при } m = 1 + \gamma,\ c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma+1)\epsilon\mu}.$$

Крім руху газів, рівняння пористого середовища набуло свого застосування у моделі нелінійного теплообміну Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer [4].

Загальне рівняння, що описує такий процес (за відсутності джерел тепла):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(k\nabla T),$$

де T – температура, c – теплоємність при постійному тиску, ρ – щільність середовища та k – теплопровідність.

Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer[4] запропонували модель:

$$\partial_t T = \Delta\,\Phi(T),$$

де $k = \Phi(T)$ – функція, що залежить від температури для опису поширення теплообміну, що відбувається в плазмі при дуже високих температурах. У цьому випадку енергія передається, в основному, шляхом електромагнітного випромінювання.

Рівняння пористого середовища також лежить в основі моделі потоку підземних вод J. Boussinesq [5]. Ця задача належить до проблем гідромеханіки, а саме з фільтрацією нестикаючої рідини через пористий пласт.

2. Метод Стампак'я

Розглянемо метод Стампак'я для дослідження багатьох задач математичної фізики, застосованих в наступному розділі для конкретного рівняння пористого середовища. В основі методу Стампак'я лежить наступна Теорема 1.1 для невід'ємної та незростаючої функції, а також її варіант узагальнення, що представлений у Теоремі 1.2, з додатковим множником.

<u>Теорема 1.1</u>

Нехай $f(x)$ – невід'ємна та незростаюча на $[x_0, +\infty)$ функція, що задовольняє умові:

$$f(y) = \frac{C}{(y-x)^{\alpha}} f^{\beta}(x),\ x_0 \le x < y, \qquad \textbf{(1.1)}$$

де C, α, β – додатні сталі. Тоді:

(i) Якщо $\beta > 1$: $f(y) = 0$ для всіх $y \ge x_0 + d$,

$$d^{\alpha} = Cf^{\beta-1}(x_0)2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}};$$

(ii) Якщо $\beta = 1$: $f(y) = e^{1-\xi(y-x_0)} f(x_0)$ для всіх $y \geq x_0$,

$$\xi = (eC)^{-\frac{1}{\alpha}};$$

(iii) Якщо $\beta < 1$: $f(y) \leq 2^{\frac{\mu}{1-\beta}} [C^{\frac{1}{1-\beta}} + (2x_0)^{\mu} f(x_0)] y^{-\mu}$
для всіх $y \geq x_0 > 0$, $\mu = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

Теорема 1.2

Нехай, дано невід'ємну та незростаючу функцію $f: (0, d) \to R^1$, що задовольняє умові:

$$f(y) \leq \frac{C}{(y-x)^{\alpha}} (f(x) + (d-x)^{\sigma})^{\beta}, \text{ для } 0 \leq x < y \leq d, \quad \textbf{(1.2)}$$

де C, α, β, σ – додатні сталі, такі, що $\beta > 1$ і $\sigma \geq \frac{\alpha}{\beta-1}$.

Далі, нехай:

$$d^{\alpha} \geq C 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} (1 + 2^{\frac{\alpha}{\beta-1} - \sigma})^{\beta} (f(0) + d^{\sigma})^{\beta-1} \quad \textbf{(1.3)}$$

Тоді $f(d) = 0$.

Зауваження

Якщо член $(d-x)^{\sigma}$ відсутній в (1.2), тоді ця лема зводиться до Теореми 1.1.

3. Застосування методу Стампак'я до рівняння пористого середовища

Розглянемо наступну граничну задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m \text{ в } Q_T, \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ в } \Omega, \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

де $m > 1$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Означення 2.1

Функція u визначена в Q_T називається слабким розв'язком задачі (2.1), якщо:

1. $u \in L^1(Q_T)$ і $u^m \in L^1\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\right)$;
2. u задовольняє інтегральну тотожність:

$$\iint_{Q_T} (\nabla u^m \nabla \eta - u \eta_t) dx dt = \int_{\Omega} u_0(x) \eta(x, o) dx \quad \textbf{(2.2)}$$

для всіх $\eta \in C^1(\overline{Q_T})$: $\eta = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T), \eta(x, T) = 0$.

Основним результатом цього розділу є теорема єдиності слабкого розв'язку задачі (2.1):

Теорема 2.1 (єдиність)

Нехай виконуються такі умови:

$$u^m \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)) \text{ і } u \in L^2(Q_T).$$

Тоді задача (2.1) має єдиний слабкий розв'язок.

Доведення

Будемо доводити методом від супротивного. Припустимо ми маємо два слабких розв'язки u_1 та u_2. Щоб довести єдиність, віднімемо їх один від одного і в результаті маємо отримати 0.

Взявши $w_i = u_i^m$ та підставляючи у (2.2) , ми отримаємо:

$$\iint_{Q_T} \{\nabla(w_1 - w_2)\nabla\eta - (u_1 - u_2)\eta_t\} dxdt = 0\,.$$

Візьмемо пробну функцію η в наступному вигляді:

$$\eta(x,t) = \int_t^T ((w_1(x,s) - w_2(x,s))ds, \text{ для всіх } t \in [0,T].$$

Навіть якщо ηне має необхідної гладкості, ми можемо її наблизити за допомогою функції η_ε, для яких (2.1) буде виконуватися.

Оскільки:

$$\eta_t = -(w_1 - w_2) \in L^2(Q_T),$$

$$\nabla\eta = \int_t^T (\nabla(w_1(x,s) - \nabla\big(w_2(x,s)\big)ds \ \in L^2(Q_T),$$

та, крім того, $\eta(x,t) \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ і $\eta(x,t) = 0.$ Ми можемо перейти до границі, при $\epsilon \to 0$ та (2.1) так і буде виконуватися для η.

Отже,

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2)(w_1 - w_2)dxdt + \iint_{Q_T} \nabla(w_1 - w_2)\left(\int_t^T (\nabla\big(w_1(x,s) - w_2(x,s)\big)ds\right)dxdt = 0,$$

Звідки

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2)(w_1 - w_2)dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^T (\nabla(w_1(x,s) - w_2(x,s))ds\right)^2 dx = 0.$$

Застосовуючи нерівність: $C_0|a-b|^p \le (|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)$для всіх $a, b \in R^1$, $p \ge 2$ $(a = u_1, b = u_2)$, де C_0 залежить від p, при $p = m + 1$ ми маємо:

$$\iint_{Q_T} |u_1 - u_2|^{m+1} dxdt \le 0.$$

Отже, ми приходимо до того, що $u_1 \equiv u_2$ в Q_T.

Теорему доведено.

Зауваження

Розв'язок, що приведено у Теоремі 2.1 також називається слабкоенергетичним.

Висновки

Таким чином, отримано такі результати:

1. Опановано метод Стампак'я, що поданий у Теоремі 1.1 та Теоремі 1.2 для дослідження багатьох задач математичної фізики.
2. Досліджено розв'язки мішаної задачі; застосовано результати дослідження до рівняння пористого середовища, що має широке прикладне значення у русі ізоентропічних газів, розповсюдженні в'язкої рідини та теорії граничного шару.

Список використаних джерел

1. *K. О.Буряченко, Nonlinear analysis of processes in anisotropic and non-uniform media (Нелінійний аналіз процесів в анізотропних та неоднорідних середовищах, на анг. мові: навчальний посібник / К. О. Буряченко, Р. М. Таранець, М.О. Шань. – Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, Слов'янськ: ІПММ НАНУ, 2021. – 99 с.*
2. *H. Darcy, Les fontaines publique de la ville Dijon, First published: Paris, 1856, pp. 305-401, 2014.*
3. *L. S. Leibenzon, The motion of a gas in a porous medium, Complete works, First published in Neftanoe I slantsevoe Khozyastvo, 10, 1929, and Neftanoe khozyastvo, 8-9, 1930, 2012.*
4. *Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena **II**, First published in Academic Press, New York, 1966, Mineola, New York, 2020.*
5. *J. Boussinesq, Recherches th´eoriques sur l'´ecoulement des nappes d'eau infiltr´es dans le sol et sur le d´ebit de sources. Comptes Rendus Acad. Sci. / J. Math. Pures Appl, 10 (1903/04), pp. 5–78.*
6. *J.L. Vazquez, The Porous Medium Equation: Mathematical Theory, Oxford University Press, 624 pages, 2010.*