УДК 517.9:574.34

Грабовенко Н.В., здобувачка
Половенко Л.П., к. пед.н., доцент
кафедри прикладної математики

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕКОЛОГІЇ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Зважаючи на стрімкі зміни у світі живої та неживої природи, є вкрай необхідним не лише контроль та охорона природного середовища, а й розробка стратегій попередження негативного впливу людської діяльності на навколишнє середовище. Масштаб впливу антропогенних факторів на окремі компоненти довкілля все збільшується і з кожним роком тільки набирає обертів, що призводить до непоправних змін у життєво важливих параметрах біосфери, які суттєво позначаються на розвитку тваринного і рослинного світу. Проявами наслідків цих процесів є зменшення чисельності популяцій та кількості видів.

Очевидно, що вести спостереження за всіма параметрами біосфери навряд чи доцільно та й практично неможливо, тому однією з головних проблем всієї екологічної діяльності, зокрема й організації системи екологічного моніторингу, є проблема отримання екологічної оцінки й прогнозу стану різних екосистем та основних елементів біосфери з метою подальшого управління їх станом і зупинення їх деградації. Тож учені екологи з успіхом використовують апарат лінійних диференціальних рівнянь для математичного моделювання і вивчення екологічних систем і процесів [1].

Диференціальні рівняння є одним із методів моделювання розвитку біологічних складових довкілля. Тому їх широко використовують у класичних рівняннях популяцій, динаміці біоценозу, моделі просторово-неоднорідних ценозів, в теорії епідемій.

В загальному випадку математична модель, побудована за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= f_1(C_1, C_2, \dots, C_n, t) \\ \frac{dC_2}{dt} &= f_2(C_1, C_2, \dots, C_n, t) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dC_n}{dt} &= f_n(C_1, C_2, \dots, C_n, t) \end{aligned} \qquad (1)\ [2]$$

де $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ – невідомі функції, що описують характеристики компонентів екологічної системи, $\frac{dC_j}{dt}$ – швидкості зміни показників екосистеми, f_j – функції, які залежать від зовнішніх та внутрішніх параметрів експоненти.

Складні екологічні процеси потребують глибокого дослідження та аналізу, тому лінійні диференціальні рівняння не завжди можуть їх описати. Проте в більшості випадків їх доцільно використовувати у вивченні екологічних систем та процесів, беручи до уваги й те, що методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь розвинуті гірше ніж лінійних. Зокрема, можна було б врахувати вплив екологічного ефекту в майбутньому: йдеться про зміни у просторі та часі умов природного життєвого довкілля. Такі зміни можуть мати як позитивний, так і негативний характер – поліпшення або погіршення природних життєвих умов, збільшення або зменшення кількості та якості природних ресурсів. Це вимагало б введення в математичну модель додаткових обмежень що значно ускладнило б її.

Хоч і нелінійні системи іноді важкі в обчисленні, але їх наближені розв'язки можна знайти майже завжди за допомогою електронних обчислювальних машин й сучасних чисельних методів. Разом з тим, не обов'язково завжди знаходити точний чи навіть наближений розв'язок, можна завдяки застосуванню якісного аналізу шуканих розв'язків з'ясувати найбільш цікаві властивості динаміки системи. Для цієї мети існує якісна теорія диференціальних рівнянь, яка дозволяє описувати поведінку фазових траєкторій і цим самим досліджувати реальні екосистеми [2].

Основним об'єктом дослідження в екології являється еволюція популяцій, тому опишемо математичний процес їх розмноження чи вимирання.

Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t, A – число, яке відповідає кількості народжених, B – померлих в одиницю часу.

Тоді запис зміни координат $x(t)$ задається формулою:

$$\frac{dx}{dt} = A - B \qquad (2)$$

У формулі (2) A і B можуть залежати від x. Наприклад:

$$A = ax, B = bx \qquad (3)$$

Де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності. Повернувшись до формули (2) та зробивши підставлення, маємо:

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x \qquad (4)$$

Розв'язок диференціального рівняння запишемо в вигляді:

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)} \qquad (5)$$

Отже, з розв'язку (5) видно, що при $a > b$ популяція виживає, а при $a < b$ – вимирає.

Авжеж можна говорити й про використання складніших диференціальних рівнянь, або ж їх систем. Розглянемо більш детально двох видову модель «хижак – жертва», яка була вперше отримана Альфредом

Лоткою в 1925 році. Вона була побудована для виявлення коливань рибних уловів в Адріатичному морі [3]. В цьому випадку її ще можна назвати моделлю міжвидової конкуренції, що описує сукупності популяцій, які функціонують як цілісна одиниця у відведеному їй просторі природного середовища.

Нехай $x(t)$ – число великих риб-хижаків, y – число малих риб-жертв в момент часу t, тоді число риб-хижаків буде рости до тих пір, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменшуватись і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases} \tag{6}$$

де a, b, c, d – додаткові константи.

В системі (5) доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від числа малих, $-dxy$ – зменшення числа малих риб від великих.

У підсумку можна сказати що екологи використовують диференціальні рівняння для прогнозування та дослідження здебільшого популяцій в екосистемах. Своєю чергою диференціальні рівняння можуть піддаватися математичному аналізу. На прикладі з популяціями можна сказати, що застосувавши комп’ютерний пакет символьної математики або методи інтегрування функцій, розроблених у численні, можна знайти значення популяції для будь-якої точки часу в майбутньому, що і буде розв’язком диференціального рівняння.

Список використаних джерел

1. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: Навч. посіб. для студ. екол. і біол. спец. вищ навч. закл. – К.: Вид. Дім „КМ Академія”, 2002. – 203 с.

2. Загальні принципи моделювання екологічних процесів за допомогою диференціальних рівнянь, стаціонарні розв’язки та їх стійкість : веб-сайт. URL: https://studfile.net/preview/7737697/page:13/

3. Система «хижак – жертва»: веб-сайт. URL: https://www.wiki.uk-ua.nina.az/Система_«хижак-жертва».html#Математична_модель