

УДК 61.311+004

Семенюк А. М., здобувач,  
Половенко Л.П., к.пед.н, доцент,  
доцент кафедри прикладної  
математики

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТАТИСТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ В МЕДИЦИНІ

*Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця*

"Книга природи написана мовою математики" – зазначив ще Галілей. Але математика це лише інструмент, який дає можливість проводити розрахунки в різних галузях науки і практичних дослідженнях. Застосунок – для грамотного використання якого потрібно коректна постановка задачі, з початковими умовами і необхідними залежностями. Найбільш універсальний опис будь-якого процесу, або його моделювання досягається використанням диференціальних рівнянь (ДР). Ці рівняння важливі для ряду як технічних так і природничих наук, навіть в деякій мірі гуманітарних (вони там не особливо ефективні – але працюють).

Функціональна залежність однієї змінної від параметру іншої не завжди явно проглядається і може бути встановлена за допомогою математичних функцій та операцій. Зазвичай, при вирішенні різних завдань, доводиться використовувати і незалежні змінні, і невідомі функції, і похідні. А диференціальне рівняння, якщо узагальнити, і є та "чарівна паличка", що пов'язує незалежну змінну, невідому функцію цієї змінної та її похідні (або диференціали) різних порядків. І таким чином, основна задача будь-якого моделювання зводиться до правильного вибору параметра (параметрів), змінна якого найбільш вдало описує сутність процесу.

Але склавши і розв'язавши диференціальне рівняння [1], що є моделлю деякого процесу, ми отримаємо безліч розв'язків, і тому не зможемо однозначно знайти залежність між шуканими величинами. Тому необхідна конкретизація розв'язку у використанні початкових умов, тобто вирішення задачі Коші (1) при наявності додаткової інформації.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$$y = \varphi(x) \mid I = (a, b), \quad F(x, \varphi(x), \varphi(x)', \varphi(x)'', \dots, \varphi(x)^{(n)}) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

Графічно, дана модель може бути представлена (Рис. 1) у вигляді "системи" об'єктів, подій, зовнішніх впливів які пов'язані деякою закономірністю. Її використання дозволить провести статистичні

дослідження явища і подальше моделювання процесу його розвитку.

Статистичні дослідження в медицині одні із найбільш соціально важливих і одні з тих що погано піддаються систематизації. Це пов'язано з великою кількістю чинників що впливають на результат.

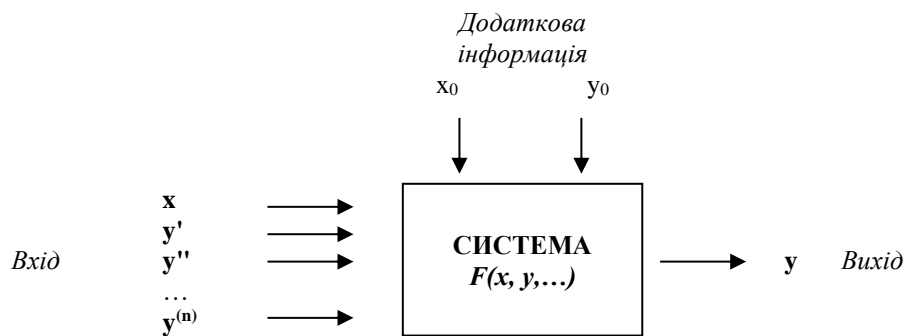


Рисунок 1 – Модель процесу

Існує багато медичних задач, у яких системний аналіз є складний, але має важливе значення і тому потребує моделювання, наприклад:

–ефективність дії лікарських засобів (час, доза, тривалість і ефективність впливу);

–обстеження гранично допустимих концентрацій речовин в організмі людини (хімічних, біологічних, радіоактивних; швидкість накопичування та виведення їх з організму);

–визначення умов виникнення і перебігу епідемій (період, територія, швидкість поширення, тривалість; вік, стать, раса);

–приріст чисельності населення (народжуваність, смертність, захворювання, вік, стать, раса, територія проживання).

Зростання чисельності популяції (будь-якої – вірусів, радіоактивних ізотопів, населення, тощо) запропонована **Мальтусом** (при  $\mu = \text{const}$  (2)) є найпростішою моделлю зміни при сталому прирості, необмежених ресурсах, до того як середовище почне виснажуватись [2]. Якщо розглядати її для дослідження приросту населення, то динаміка приросту має вигляд:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (B - D)N = \mu N \quad (2)$$

$$dN(t) = (B - D)Ndt = BNdt - DNdt = K_{\text{нар.}} - K_{\text{см.}}$$

де,  $N$  – чисельність населення (**ЧН**);  $B$  – коефіцієнт народжуваності (**КН**);  $D$  – коефіцієнт смертності (**КС**).

Але така модель дуже спрощена, і не зовсім відповідає реальності, так як на відміну  $K_{\text{нар.}}$  – лінійної функції однієї змінної,  $K_{\text{см.}}$  залежить від декількох параметрів – вік, епідемії, стихійні лиха, війни, наявність харчів, та ін. До того ж, між народжуваністю і смертністю немає сталої рівноваги,

невелике порушення рівності КН та КС веде з часом до все більшого відхиленню функції  $N(t)$  від рівноважного значення  $N(0)$  [3]:

$$dN(t) = (B - D)Ndt = BNdt - DNdt = K_{\text{нар.}} - K_{\text{см.}} \quad (3)$$

$$dN(t) = (b - d)xdx - d_1x^2dt - d_2x^2dt - \dots$$

Значимість компонентів, розміщених правіше, зменшується. На якомусь етапі, для спрощення розв'язку, ними можна знехтувати, але для отримання достатньої точності підрахунків і побудові графічної моделі бажано використовувати ЕОМ та спеціалізовані математичні пакети, наприклад Maple, Mathematica, MathCAD, та ін. [4]. Використання ЕОМ та диференціальних рівнянь, дозволяє узагальнити і об'єднати ідеї математичного аналізу, виконати моделювання з врахуванням комбінації вхідних параметрів, знайти коефіцієнти співвідношень параметрів, що не пов'язані між собою. В результаті ми отримаємо можливість використання не узагальненої формули Бернуллі, а засіб для більш "тонкого" моделювання зміни кількості населення.

Крім статистики, в медицині диференціальні рівняння можливо використовувати при різних дослідженнях: швидкість кровотоку, ехокардіографія (робота клапанів і стан стінок серця), параметри гемодинаміки, для опису медико-біологічних ультразвукових досліджень і кардіографія; для дослідження органів слуху та мовлення.

Використання математики для реальних соціальних задач вимагає від дослідника моральної відповідальності. Тому необхідно використовувати методи самоконтролю, щоб запобігти помилок у результатах моделювання. Навіть досить незначна інформація про характеристики моделі статистичних досліджень та плановані результати, дасть можливість, в подальшому, створити більш точний метод оцінювання параметрів:

- ❖ підбору "нульових" даних, наближень в ітераційних методах;
- ❖ відбору найбільш характерних "впливових" величин;
- ❖ спростити порядки та кількість диференціальних рівнянь, що використовуються при моделюванні.

Отже, важливим при розв'язуванні прикладних задач є уміння:

- ❖ розпізнати задачу;
- ❖ сформулювати математичну модель об'єкту/події;
- ❖ провести теоретичне дослідження подібних ситуацій, та виконати узагальнення знань про задачу;
- ❖ виконати експериментальне моделювання/обчислення;
- ❖ пояснити та систематизувати отримані результати.

Підсумовуючи наведене пам'ятаємо: ЕОМ, звільняючи нас від багатьох обов'язків, не звільняє у всякому разі від двох: від необхідності володіти математичним апаратом і творчо мислити.

### Список використаних джерел

1. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с
2. Дж. Марри, Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях; Изд-во: М.: Мир, 1983 г.
3. І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, І. А. Горіцина ; Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. - К.: Київський університет, 2010. - 319 с.
4. Математичні пакети: їх роль в освіті. URL: <http://hypertextbook.com/eworld/packages/>.

**УДК 330.4**

*Підруцький Д.А., здобувач гр. КН-21-А  
Половенко Л.П., к.пед.н, доцент,  
доцент кафедри прикладної  
математики*

### **МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА:ПЕРЕВАГИ ТА НЕДОЛІКИ**

*Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця*

Модель Харрода-Домара або ж модель гарантованого темпу росту доволі давно сформована та видана, але все ще не втрачає своєї значущості. З її допомогою ми можемо зобразити модель економічного зростання. На даний момент Модель Харрода-Домара по більшій частині використовують, як основу для наступних досліджень.

Формування цієї моделі почалося ще з середини 20 ст., коли два відомі для тих часів економісти: Рой Харрод, який дослідив модель та описав її в «Нарисі теорії динаміки» [1] та Освій Домар опублікував модель в «Нарисі по теорії економічного зростання» [2]. З часом вже інший економіст Р. Солоу об'єднав дві моделі в одну та назвав її, в честь авторів, моделлю Харрода-Домара, яку представив у статті «Вклад в теорію зростання». В подальшому дана модель після всього не зазнавала значних змін, схоже вона все ще знаходить своє місце в сучасних дослідженнях.

Метою дослідження моделі Харрода-Домара є аналіз актуальності даної моделі в сучасних дослідженнях.

Розглянемо схему моделі Харрода-Домара та її критерії, оцінімо графік моделі, представлений у Вікіпедії [3].