УДК 004.92:004.46

Бевзюк А. Ю., здобувачка вищої освіти;
Фриз І. В., канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач кафедри інформаційних технологій,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є ТА ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є В АНАЛІЗІ ТА ОБРОБЦІ ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

Ключові слова: ряд Фур'є, перетворення Фур'є.

Вступ. Тригонометричні ряди Фур'є являють собою математичний інструмент, за допомогою якого можна розкладати складні функції у суму простіших, зокрема синусів та косинусів [1, 2].

Актуальність. Розклад періодичних функцій у ряд Фур'є є ефективним інструментом для аналізу і моделювання різноманітних явищ. Це особливо важливо у сучасній комп'ютерній графіці, де обробка зображень, стиснення та відновлення мають велике значення. Метод рядів Фур'є дає змогу розглядати складні зображення як суму простих компонент, що спрощує їх обробку та аналіз.

Зокрема, розклад періодичної ні парної, ні непарної функції $f(x)$, яка визначена на відрізку $[-l; l]$ і задовольняє умови Діріхле, у ряд Фур'є має вигляд [1]:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}\right),$$

де $T = 2l$ – це період функції;
a_0, a_n, b_n – це коефіцієнти ряду Фур'є, які визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}\,dx.$$

Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку (–∞; +∞), перетворення Фур'є визначається так:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

де $F(t)$ – це функція частоти, а t – це частотний параметр [2].

Ряд і перетворення Фур'є тісно пов'язані з геометрією нескінченномірних функціональних просторів, або гільбертових просторів, які узагальнюють поняття векторних просторів для включення функцій із нескінченною кількістю ступенів свободи [2]. Перетворення Фур'є використовується для неперіодичних функцій, тоді як у рядах Фур'є кожна синусоїдальна та косинусоїдальна компонента має свою амплітуду і фазу. Амплітуда визначає «висоту» компоненти, а фаза визначає, на якому етапі коливань вона розпочинається [3]. Обидва ці підходи вивчають розкладання функцій за допомогою синусоїдальних та косинусоїдальних функцій, але в різних контекстах.

Вивчення властивостей рядів Фур'є призвело до виникнення аналізу Фур'є [1], який і досі залишається важливим інструментом у різних областях математики, фізики та інженерії. Зокрема, він широко використовується в аналізі сигналів, обробці зображень, теорії керування та інших галузях [4].

Розглянемо застосування рядів Фур'є у комп'ютерній графіці, зосереджуючись на компресії та відновлені.

Компресія, або стиснення, є важливим аспектом цифрової обробки зображень, спрямованої на економію пам'яті на цифрових носіях [5]. А ряди Фур'є часто використовуються під час цього процесу. Використовуючи математичні властивості розкладання зображень на суму простих функцій (синусів та косинусів), можна стискати зображення у частотному просторі, після чого видаляти менш важливі частоти, зберігаючи лише важливі нам частоти.

Відновлення зображень за допомогою рядів Фур'є використовує обернене перетворення Фур'є для відтворення оригінального зображення з його частотного представлення. Інтеграл, який представляє обернене перетворення Фур'є, має такий вигляд [2]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(t)\, dt = f(x).$$

Цей процес може бути корисним у ситуаціях, коли зображення було піддане компресії, фільтрації або іншим операціям обробки, і потрібно відновити його початковий стан.

Оскільки зображення в області Фур'є розкладається на синусоїдальні компоненти, легко дослідити або обробити певні частоти зображення, впливаючи так на геометричну структуру в просторовій області. Під час обробки зображень часто відображається лише величина перетворення Фур'є, оскільки воно містить більшу частину інформації про геометричну структуру. Щоб краще зрозуміти перетворення, розглянемо його на прикладі деяких зображень [4]. На рис. 1 ми бачимо початкове зображення, яке демонструє нам вертикальні смужки шириною по 2 пікселі.

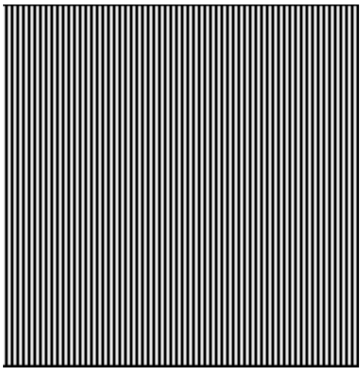

Рисунок 1 – Початкове зображення

На рис. 2 ми бачимо вже перетворене зображення, яке містить 3 основні значення (точки): DC-значення (тобто середнє зображення), оскільки Фур’є-образ симетричний до свого центру, дві точки, що відповідають частоті смуг на вихідному зображенні. Дві точки лежать на горизонтальній лінії, що проходить через центр зображення, тому що інтенсивність зображення у просторовій області змінюється найбільше, якщо ми йдемо вздовж неї горизонтально.

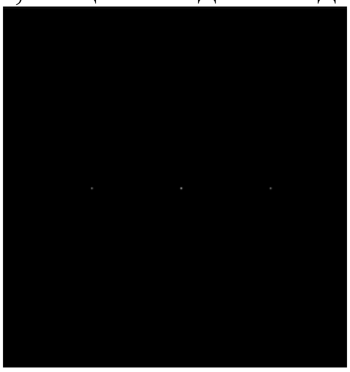

Рисунок 2 – Перетворене зображення

Висновки

Отже, цей математичний підхід дає змогу досягати вражаючих візуальних результатів, зменшуючи обсяг даних та оптимізуючи обробку зображень. Розуміння та використання рядів Фур’є у комп’ютерній графіці відкриває шлях до нових технологічних можливостей та покращення візуальних ефектів.

Список використаних джерел

1. Синявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур’є: навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. Ужгород, 2015. 70 с.
2. Brunton S. L., Kutz J. N. Data Driven Science & Engineering Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. University of Washington, 2019. 521 p.
3. Спектральний аналіз. URL: https://kivra.kpi.ua/wp-content/uploads/file/discipline/AOTI/AOTI_2_2.pdf (дата звернення 12.11.2023).
4. Fourier Transform / R. Fisher, S. Perkins, A. Walker, E. Wolfart. URL: https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/fourier.htm. (дата звернення 12.11.2023).
5. Творошенко І. С. Цифрова обробка зображень: консп. лекцій. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. 74 с.