УДК 512.7

Мороз Д. В., здобувач вищої освіти;
Луценко А. В., д-р філософії з математики,
старший викладач кафедри прикладної математики та кібербезпеки,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ КВАТЕРНІОНІВ

Ключові слова: алгебра, кватерніони, застосування, графіка, кодування.

Вступ. У галузі математики система кватерніонних чисел розширює комплексні числа. Перший опис кватерніонів належить ірландському математику Вільяму Гамільтону. Використовуючи їх у механіці тривимірного простору, Гамільтон визначив кватерніон як відношення двох спрямованих прямих у тривимірному просторі або як відношення двох векторів розміром чотири над полем дійсних чисел. Тобто кватерніони – це система гіперкомплексних чисел, яка утворює векторний простір і має широке застосування.

Актуальність. Кватерніони знаходять застосування як у чистій математиці, так і в практичних видах математичного моделювання, зокрема у вирахуваннях, пов'язаних із тривимірними обертаннями. Кватерніони можуть функціонувати як доповнення до інших методів обертання або як їх альтернатива, залежно від конкретного використання. Їх використовують у тривимірній комп'ютерній графіці, у галузі комп'ютерного зору, кристалографічного аналізу текстур, кодування тощо. Вивчення кватерніонів є актуальним, оскільки широко використовується у різних галузях науки.

Кватерніони є потужним математичним інструментом, який дає змогу ефективно вирішувати проблеми, пов'язані з обертанням, орієнтацією та просторовими відношеннями в різних галузях науки і техніки. Кодування за допомогою кватеріонів може включати в себе різноманітні операції, як-от тиснення даних, виявлення та виправлення помилок, безпека, зберігання та передача даних. Кодові слова використовуються в деяких цифрових системах зв'язку для виправлення або виявлення помилок. Процедура декодування на основі цілих кватерніонів була представлена у праці [1]. Досконалим кодом називається код, який досягає границі (границі пакування сфери) у заданій матриці. Досконалі коди здавна цікавлять теоретиків і математиків, оскільки вони відіграють важливу теоретичну і практичну роль у теорії кодування.

Означення [1]. Алгеброю кватерніонів (алгеброю Гамільтона) над множиною дійсних чисел (ℝ), позначеною через H(ℝ), називається асоціативна унітарна алгебра, яка задається таким записом:

1) H(ℝ) – вільний модуль ℝ над символами *1*, i, j, k, тобто H(ℝ) = $\{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$;

2) *1* – мультиплікативний одиничний елемент;

3) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$;

4) $i\,j = -ji = k, ik = -ki = j, jk = -kj = i$.

Множина $H(\mathbb{R})$, яка визначається $H(\mathbb{Z}) = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k: a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$, є підмножиною H($\mathbb{R}$), де $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел.

Якщо $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ – ціле кватерніонне число, то його спряженим кватерніоном є $\bar{q} = a_0 - (a_1 i + a_2 j + a_3 k)$.

Норма q дорівнює $N\,(q) = q\bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Кватерніонне число складається з двох частин: дійсної та уявної. Нехай $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ – ціле число-кватерніон. Тоді його дійсна частина дорівнюєa_0, а уявна частина – $a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Комутативна властивість множення не виконується для кватерніонних цілих чисел. Однак якщо уявні частини кватерніонних чисел паралельні одна одній, то їх добуток є комутативним.

Множина $\mathbb{R}$ визначена так: $\mathbb{R} = \{a + bV: a, b \in \mathbb{Z}\}$, яке є підкільцем кільця цілих кватерніонів [2]. Комутативна властивість множення виконується над $\mathbb{R}$. Зауважимо, що структура кільця $\mathbb{R} = \{a + bV: a, b \in \mathbb{Z}\}$ пов'язана з простим числом $\pi = m + nV$, де $m, n \in \mathbb{Z}$.

Теорема [1]. Для кожного непарного раціонального простого числа p у множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ існує просте число $\pi \in H(\mathbb{Z})$, таке, що $N(\pi) = p = \pi\bar{\pi}$. Зокрема, p не є простим у множині $H(\mathbb{Z})$.

Наслідок [2]. $\pi \in H(\mathbb{Z})$ є простим у $H(\mathbb{Z})$ тоді і тільки тоді, коли $N(\pi)$ є простим у $\mathbb{Z}$.

У праці [1] наведено процедуру декодування на основі цілих кватерніонів. Надано ефективний і послідовний модифікований алгоритм декодування для циклічних кодів довжин $n = \varphi(p)$ і $2n - 1 = 2\varphi(p) - 1$ для отримання можливості виправлення помилок. Довжина циклічних кодів збільшується завдяки великому простому p. Кватерніони також є потужним інструментом під час розробки графіки та фізики в іграх. Але досвідчені розробники стверджують, що хоча майже кожен користувач стикається з кватерніонами у своїй роботі, далеко не усі це усвідомлюють.

Висновки

Оскільки захист інформації сьогодні є актуальним, то виникають питання про розроблення нових методів кодування і декодування інформації. Зокрема, застосування теорії алгебри кватерніонів є не досить дослідженим і потребує більш детального вивчення.

Список використаних джерел

1. Özen M., Güzeltepe M. Codes over Quaternion Integers. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 3, № 4. P. 670–677.

2. Quaternion Integers Based Higher Length Cyclic Codes and Their Decoding Algorithm / M. Sajjad, T. Shah1, M. M. Hazzazi, A. R. Alharbi, I. Hussain. *Computers, Materials & Continua*. 2022. Vol. 73, № 1. P. 1178–1194.