УДК: 512.548

Нестерук М. О., здобувач вищої освіти,
Фриз І. В., канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач кафедри інформаційних технологій,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПРО ІСНУВАННЯ СИЛЬНО САМООРТОГОНАЛЬНИХ ТЕРНАРНИХ МЕДІАЛЬНИХ КВАЗІГРУП

Анотація. Вивчаються медіальні тернарні квазігрупи, які мають властивість сильної самоортогональності. Знайдено найменший порядок, для якого існують сильно самоортогональні тернарні медіальні квазігрупи над циклічними групами, побудовано серію прикладів таких квазігруп.

Ключові слова: тернарна квазігрупа, медіальна квазігрупа, ортогональність, сильна ортогональність, самоортогональність.

Вступ. Квазігрупові операції та їх ортогональність цікаві своїми комбінаторними властивостями. Зокрема, ці поняття використовуються в алгебрі, комбінаториці, теорії графів, геометрії, теорії кодування і шифрування інформації тощо. Одним із прикладів застосування є зв'язок ортогональності з максимально дистанційно роздільними, або МДР-кодами. Відомо, що довільна квазігрупа є еквівалентною МДР-коду відстані 2. А множина $\ell - n$, де $\ell > n$, сильно ортогональних квазігруп порядку m еквівалентна m-арному $(\ell, m^n, \ell - n + 1)$-коду довжини ℓ з мінімальною відстанню $\ell - n + 1$, що містить m^n кодових слів [1].

Сьогодні проблема побудови ортогональних квазігруп з певними властивостями є відкритою. Деякі методи побудови ортогональних n-арних квазігруп наведені у [1, 2]. Оригінальний підхід до побудови ортогональних квазігруп запропонований у праці [3], а саме побудова квазігрупи з властивістю парастрофної ортогональності. Цей підхід взято за основу під час відшукання умов сильної самоортогональності тернарних квазігруп у [4]. Нашою метою є дослідити порядки, для яких існують сильно самоортогональні квазігрупи, і побудувати серію прикладів таких квазігруп.

Основний текст. Нехай Q – скінченна множина порядку m. Тернарна операція f, яка визначена на Q, називається *оборотною,* або *квазігруповою,* якщо для довільних $a, b \in Q$ кожен з термів $f(x, a, b)$, $f(a, x, b)$, $f(a, b, x)$ визначає підстановку множини Q. Групоїд $(Q; f)$ називається *квазігрупою* порядку m.

Трійка тернарних операцій f_1, f_2, f_3, що визначені на Q, називається *ортогональною* [5], якщо для всіх $a, b, c \in Q$ система:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = a, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = b, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = c. \end{cases} \qquad (1)$$

має єдиний розв'язок. Множина тернарних операцій $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_t\}$, де $t \geq 3$ називається *ортогональною,* якщо кожна трійка різних операцій із цієї множини є ортогональною.

Оскільки кожній тернарній операції порядку m відповідає куб розмірності $m \times m \times m$, який містить m різних символів із Q, а у випадку квазігрупової операції – *латинський куб* (кожен із символів зустрічається точно один раз у кожній лінії відповідного куба), то ортогональність трійки тернарних квазігруп означає, що відносно накладання відповідних латинських кубів кожна отримана трійка елементів зустрічається точно один раз.

Трійка тернарних квазігрупових операцій f_1, f_2, f_3 називається *сильно ортогональною*, якщо ця трійка є ортогональною і за довільної фіксації будь-якої зі змінних у системі (1) отримана система має єдиний розв'язок для всіх $a, b, c \in Q$, тобто отримані трійки бінарних операцій є попарно ортогональними. Для відповідних латинських кубів це означає, що самі куби є ортогональними, і всі їх відповідні шари (тобто латинські квадрати) є попарно ортогональними.

Для кожної перестановки $\sigma \in S_4$, *σ-парастроф* ${}^{\sigma}f$ оборотної тернарної операції f визначається зі співвідношення:

$$^{\sigma}f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = x_{4\sigma} :\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_4.$$

σ-парастроф називається:

- *i-им діленням*, якщо $\sigma = (i4)$;
- *головним парастрофом*, якщо $4\sigma = 4$.

Тернарна квазігрупа називається:

- *парастрофно-ортогональною*, якщо вона має 3 ортогональні парастрофи;
- *самоортогональною*, якщо вона має 3 ортогональні парастрофи;
- *тотально самоортогональною*, якщо всі її головні парастрофи є потрійно ортогональними;
- *сильно самоортогональними,* якщо кожна трійка головних парастрофів є сильно ортогональною.

Теорема 1 [6]. Тернарна квазігрупа $(Q; f)$ є *медіальною* тоді і тільки тоді, коли існує абелева група $(Q; +)$, така, що:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3 + a, \qquad (2)$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – попарно комутуючі автоморфізми групи $(Q; +)$ і $a \in Q$.

Поліном f над комутативним кільцем K називається *оборотнозначним* над підмножиною $H \subseteq K$, якщо $f(a, b, c)$ є оборотним у K для будь-яких $a, b, c \in H$ [4].

Критерій сильної самоортогональності тернарних медіальних квазігруп:

Теорема 2 [4]. Тернарна медіальна квазігрупа (Q, f), де f визначається рівністю (2), є сильно самоортогональною тоді і тільки тоді, коли поліноми:

$$p_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 - \gamma_2,$$
$$p_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$
$$p_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = {\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 + {\gamma_3}^2 - \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3,$$
$$p_4(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1\gamma_2 - \gamma_3^2,$$
$$p_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 + \gamma_2$$

є оборотнозначними над множиною автоморфізмів $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ групи $(Q, +)$.

Програмним шляхом, за допомогою умов, наведених у теоремі 2, встановлено найменший порядок, для якого існують тернарні медіальні сильно самоортогональні квазігрупи над циклічною групою.

Теорема 3. Тернарні медіальні сильно самоортогональні квазігрупи над циклічною групою порядку m існують тоді і тільки тоді, коли $m \geq 11$.

Тернарна квазігрупа має 6 головних парастрофів, тому побудувавши квазігрупу із заданою властивістю, отримуємо множину, яка містить 6 потрійно сильно ортогональних квазігруп.

Наведемо серію прикладів сильно самоортогональних квазігруп.

Теорема 4. Нехай Z_p є кільцем лишків за модулем p, де p – просте число. Тернарна квазігрупа $(Z_p; f)$, що визначена рівністю:

$$f(x, y, z) = 15x + 12y + 9z, \tag{3}$$

є сильно самоортогональною квазігрупою для всіх простих чисел p, таких, що $17 \leq p \leq 107$.

Теорема 5. Якщо найменший простий дільник числа m більший ніж 13, то $(Z_m; f)$, де f визначається за допомогою рівності (3) є сильно самоортогональною квазігрупою.

Висновки. Із [4] відомо, що не існує медіальних сильно самоортогональних тернарних квазігруп для арності $n > 3$, а із [7], що не існує тотально парастрофно-ортогональних (всі парастрофи різні і потрійно ортогональні) з властивістю сильної ортогональності для арності $n > 2$. Отже, одним із напрямів подальших досліджень є питання існування сильно самоортогональних медіальних тернарних квазігруп, якщо їх група парастрофної симетрії не є тривіальною, тобто деякі парастрофи можуть збігатися.

Список використаних джерел

1. Ethier J. T., Mullen G. L. Strong forms of orthogonality for sets of hypercubes. Discrete Math. 2012. Vol. 312, iss. 12–13. P. 2050–2061. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.03.008.

2. Evans T. The construction of orthogonal k-skeins and latin k-cubes. Aequationes Math. 1976. Vol. 14. P. 485–491. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01835999 .

3. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. Vol. 185, № 2. P. 184–191. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-012-0907-z.

4. Fryz I., Sokhatsky F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2022. №3 (100). P. 41–55. DOI: https://doi.org/10.56415/basm. y2022.i3.p41.

5. Belyavskaya G. B., Mullen G. L. Orthogonal hypercubes and n-ary operations. *Quasigroups Related System.* 2005. Vol. 13. P. 73–76.

6. Белоусов В. Д. n-арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца 1972. 224 с.

7. Fryz I. On orthogonality of parastrophes of ternary quasigroups. LOOPS'23: Abstracts for contributed talks (Będlewo, Poland, 25.06–02.07.2023). URL: https://www.impan.pl/en/activities/banach-center/conferences/23-loops/abstracts (дата звернення: 24.10.2024).