УДК: 512.5:512.64

Луценко А. В., д-р філософії з математики,
в. о. завідувача кафедри прикладної математики та кібербезпеки,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

МАТРИЧНІ CIP-КВАЗІГРУПИ З ФУНКЦІЄЮ ОБОРОТНОСТІ $\boldsymbol{\gamma(x) = x^2}$

Анотація. У роботі досліджено матричні квазігрупи з властивістю схрещеної оборотності та функцією оборотності $\gamma(x) = x^2$. Знайдемо умови, за яких матрична квазігрупа матиме властивість схрещеної оборотності (середньої та лівої).

Ключові слова: квазігрупа, матрична квазігрупа, матриця, кільце.

Це дослідження є продовженням робіт [1, 2, 3]. Матричні квазігрупи є одним із видів центральних квазігруп, і в деяких випадках лінійні ізотопи елементарних абелевих груп збігаються з матричними квазігрупами. Тому вивчення центральних і матричних квазігруп має значний інтерес.

Квазігрупою називається групоїд $(Q;\cdot)$, такий, що для довільних a, b кожне з рівнянь $a \cdot x = b$, $y \cdot a = b$ має єдиний розв'язок.

Квазігруповою (оборотною) операцією називається функція, що визначена на скінченній чи нескінченній множині, якщо вона оборотна за кожною своєю змінною. Дві бінарні операції f і g, які визначені на множині Q, називаються ортогональними, якщо система:

$$\begin{cases} f(x,y) = a, \\ g(x,y) = b \end{cases} \tag{1}$$

має єдиний розв'язок для всіх $a, b \in Q$.

Нехай K – довільне комутативне кільце з одиницею, і $\bar{a} \in K^n = K \times \ldots \times K$. Групоїд $(K^n; f)$, визначений рівністю:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}B + \bar{a}, \tag{2}$$

називається *матричною квазігрупою* над кільцем K, якщо матриці A, B оборотні; *унітарною матричною*, якщо існують квадратні матриці A, B порядку n над кільцем K порядку m, такі, що для всіх $\bar{x}$, $\bar{y} \in K^n$ виконується рівність:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}B. \tag{3}$$

Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається: *середньою*, *лівою та правою CIP-квазігрупою*, якщо відповідно існують відображення ψ, υ, γ, такі, що для всіх x, y виконуються рівності:

$$\psi(x) \cdot yx = y; \; yx \cdot y = \upsilon(x); \; y \cdot xy = \gamma(x) [2].$$

Теорема 1 [4]. Парастрофна орбіта CIP-квазігруп із функцією оборотності x^2 містить три многовиди:

$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}$
$xy \cdot x^2 = y$ $x \cdot yx^2 = y$ $x^2 y \cdot x = y$ $x^2 y \cdot x = y$	$x(yx \cdot y) = yx \cdot y$ $(y \cdot xy)x = y \cdot xy$ $y(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot y = x$ $y \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)y = x$	$x(y \cdot xy) = x$ $(yx \cdot y)x = x$

Теорема 2. Нехай $(K^n; f)$ – матрична квазігрупа, і (4) – її канонічний розклад, тоді $(K^n; f)$ є середньою CIP-квазігрупою, яка визначена рівністю $xy \cdot x^2 = y$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) $B = A^{-1}$;
2) $\bar{a}A + \bar{a}B + \bar{a} = 0$;
3) $A^2 + E + A^{-2} = 0$.

Теорема 3. Нехай $(K^n; f)$ – матрична квазігрупа, і (4) – її канонічний розклад, тоді $(K^n; f)$ є лівою CIP-квазігрупою, яка визначена рівністю $x(yx \cdot y) = yx \cdot y$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) $\bar{a}AB + \bar{a}B - \bar{a}A = 0$;
2) $A^2B + B^2 = A^2 + B$;
3) $A + BAB = BA$.

Список використаних джерел

1. Lutsenko A. V. Classification of group isotopes according to their inverse properties. *Applied problems of mechanics and mathematics.* 2020. Vol. 13. P. 48–62. DOI: 10.15407/apmm2020.18.48-61
2. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations II. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* 2021. Vol. 62, № 3. P. 309–323.
3. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V., Fryz I. V. Construction of Quasigroups with Invertibility Properties. *Journal of Mathematical Sciences.* 2024. Vol. 279, № 1. P. 115–132. DOI: 10.1007/s10958-024-06999-0.
4. Сохацький Ф. М., Крайнічук Г. В., Сидорук В. А. Напіврешітка многовидів квазігруп з лінійністю. *Algebra and Discrete mathematics.* 2021. Vol. 31, № 2. P. 261–285. URL: http://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/1748/pdf