УДК: 512.6:004.032.26

Родюк А. І., здобувачка вищої освіти,
Загоруйко Л. В., канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики та кібербезпеки,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ЗАСТОСУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ СТРУКТУР У НЕЙРОННИХ МЕРЕЖАХ

Анотація. Робота присвячена застосуванню алгебраїчних структур у побудові нейронних мереж. Розглянуто алгебраїчну обробку сигналів, представлення асоціативних алгебр та гомоморфізми для узагальнення згорткових нейронних мереж. Такий підхід формалізує структуру нейронної мережі з математичного погляду.

Ключові слова: алгебраїчна обробка сигналів, представлення, алгебраїчна нейронна мережа.

Вступ. Сучасний розвиток нейронних мереж дедалі частіше потребує математично обґрунтованих підходів для опису їх структури та властивостей. Застосування алгебраїчних структур у побудові нейронних мереж дає змогу узагальнити наявні моделі та забезпечити їх стійкість до різних типів перетворень. Такий підхід дає змогу поєднати інструменти абстрактної алгебри з методами обробки сигналів, що робить дослідження у цій сфері актуальними.

Метою роботи є демонстрація того, що принципи абстрактної алгебри можуть бути покладені в основу побудови нейронних мереж; продемонструвати, як елементи алгебри, її представлення та гомоморфізми визначають операції фільтрації та узагальнюють структуру згорткових мереж.

Основна частина. Алгебраїчна обробка сигналів забезпечує основу для розуміння та узагальнення традиційної обробки сигналів, використовуючи теорію представлення алгебр [1; 2].

Алгебраїчна обробка сигналів визначається як трійка:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \rho), \tag{1}$$

де $\mathcal{A}$ – асоціативна алгебра з одиницею;

$\mathcal{M}$ – векторний простір із внутрішнім добутком;

$\rho : \mathcal{A} \to End(\mathcal{M})$ – гомоморфізмом між алгеброю $\mathcal{A}$ та множиною ендоморфізмів векторного простору $\mathcal{M}$.

Елементи у (1) пов'язані поняттям представлення. *Представленням* $(\mathcal{M}, \rho)$ асоціативної алгебри $\mathcal{A}$ називається векторний простір $\mathcal{M}$ разом із гомоморфізмом $\rho :\ \mathcal{A} \to End(\mathcal{M})$, тобто лінійним відображенням, що зберігає множення та одиницю.

Сигнали є елементами векторного простору $\mathcal{M}$, а фільтри – елементами алгебри $\mathcal{A}$.

Отже, векторний простір $\mathcal{M}$ визначає об'єкти, що цікавлять, а алгебра $\mathcal{A}$ – правила операцій, що визначають фільтр. Гомоморфізм ρ перетворює абстрактні оператори $a \in \mathcal{A}$ у конкретні оператори $\rho(a)$, які діють на сигнали x для отримання вихідних даних фільтра:

$$y = \rho(a)x. \quad (2)$$

Алгебраїчні фільтри в (2) узагальнюють згорткову обробку часових сигналів, відповідно їх можна використовувати для узагальнення згорткових нейронних мереж з метою побудови математичної моделі структури нейронних мереж на основі понять асоціативної алгебри та її представлень.

Якщо $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ – породжувальна множина алгебри $\mathcal{A}$, то всі елементи $\mathcal{A}$ можна утворити з $\mathcal{G}$, використовуючи операції, визначені для алгебри.

Тоді, враховуючи, що представлення об'єднує алгебру $\mathcal{A}$ з сигналами x, представлення $\mathcal{S} = \rho(g)$ породжувального елементу $g \in \mathcal{G}$ називають *зсувними операторами*. Звідси випливає, що фільтри $\rho(a)$ породжуються із множини операторів $\mathcal{S} = \rho(g)$.

До того ж якщо $a = p_{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ – поліном, що породжує елемент $a \in \mathcal{A}$, враховуючи, що ρ є гомоморфізмом, який зберігає операції, то реалізацію фільтра $\rho(a)$ можна записати як:

$$\rho(a) = p_{\mathcal{M}}\big(\rho(\mathcal{G})\big) = p_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S}). \quad (3)$$

Інваріантність щодо застосування оператора зсуву означає, що застосування оператора зсуву на вході алгебраїчного фільтра еквівалентно застосуванню того самого оператора зсуву на виході до хвостових елементів певного шару. А саме: для всіх фільтрів $a = p(\mathcal{G})$ і операторів зсуву $S \in \mathcal{S}$ виконується рівність:

$$Sp(\mathcal{S})x = p(\mathcal{S})Sx.$$

Це справедливо для будь-якої комутативної алгебри.

Інваріантність щодо застосування оператора зсуву важлива в обробці дискретних сигналів, обробці зображень та обробці групових сигналів, оскільки завдяки ній алгебраїчні фільтри є рівномірними щодо часових, циклічних та групових сигналів відповідно.

Інваріантність перестановок передбачає, що послідовна перестановка сигналу та оператора зсуву призводить до послідовної перестановки виходу фільтра. Формально нехай $P \in End(\mathcal{M})$ є оператором перестановки з ад'юнкцією $P^T = adj(P)$. Перестановкою сигналу x є $\tilde{x} = P^T x$, а послідовною перестановкою оператора зсуву S є ендоморфізм $\tilde{S} = P^T S P$. Якщо позначити $\tilde{S}$ множиною операторів зсуву, то $p\big(\tilde{S}\big)\tilde{x} = P^T(p(\mathcal{S})x)$.

Інваріантність перестановок є важливою в обробці сигналів на графах, оскільки вона передбачає обробку, яка не залежить від маркування вузлів графу.

Алгебраїчна нейронна мережа визначається як багатошарова структура, у якій кожен шар ℓ складається із трійки $(\mathcal{A}_\ell, \mathcal{M}_\ell, \rho_\ell)$. Тобто алгебраїчна нейронна мережа є моделлю алгебраїчної обробки сигналів, пов'язаною з кожним шаром – вхідним прихованим або вихідним, причому $(\mathcal{M}_\ell, \rho_\ell)$ є представленням $\mathcal{A}_\ell$ [3].

Відображення між шарами здійснюється за допомогою функцій $\sigma_\ell: \mathcal{M}_\ell \to \mathcal{M}_{\ell+1}$, що виконують операції точкової нелінійності та пулінгу. Тобто вихід із шару ℓ у алгебраїчній нейронній мережі визначається так:

$$x_\ell = \sigma_\ell(\rho_\ell(a_\ell)x_{\ell-1}), \quad (4)$$

де $a_\ell \in \mathcal{A}_\ell$.

Вихід також може бути виражений як:

$$x_\ell = \Phi(x_{\ell-1}, \mathcal{P}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}), \quad (5)$$

де $\mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{A}_\ell$ показує властивості фільтрів;

$\mathcal{S}_\ell$ є множиною зсувів пов'язаних з $(\mathcal{M}_\ell, \rho_\ell)$.

Терм $\Phi(x, \{\mathcal{P}_\ell\}_1^L, \{\mathcal{S}_\ell\}_1^L)$ представляє загальне відображення, пов'язане з алгебраїчною нейронною мережею, що діє на сигнал.

Обробка на кожному шарі може виконуватися за допомогою кількох наборів фільтрів, що призведе до отримання кількох характеристик. Зокрема, характеристика f, отримана на шарі ℓ визначається як:

$$x_\ell^f = \sigma_\ell\left(\sum_{g=1}^{F_\ell} \rho_\ell\left(a_\ell^{gf}\right) x_{\ell-1}^g\right), \quad (6)$$

де a_ℓ^{gf} – фільтр у $\mathcal{A}_\ell$, що використовується для обробки g-тої ознаки $x_{\ell-1}^g$, отриманої з шару $\ell - 1$;

F_ℓ – кількість ознак.

Пулінг відносять до оператора σ_ℓ. Зокрема, $\sigma_\ell = P_\ell \circ \eta_\ell$, де P_ℓ є пулінговим оператором, що проєктує елементи з даного векторного простору в інший, а η_ℓ – точковою нелінійністю. Єдина властивість, яку припускають для σ_ℓ, полягає у тому, що це Ліпшицева функція з фіксованою точкою $\sigma_\ell(0) = 0$.

Висновки. У роботі розглянуто підхід до побудови нейронних мереж на основі понять абстрактної алгебри. Показано, що представлення асоціативної алгебри та відповідні гомоморфізми можуть описувати дію фільтрів і передавання сигналів між шарами нейронної мережі. Такий підхід дає змогу формалізувати згорткові нейронні мережі математично та розглядати з погляду алгебраїчних властивостей.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на аналіз властивостей стабільності алгебраїчних нейронних мереж, розширення підходу на некомутативні алгебри та складніші типи сигналів, як-от часові, графові, групові, або багатовимірні. Перспективним також є вивчення можливостей практичного застосування таких моделей для різних типів даних і задач машинного навчання.

Список використаних джерел

1. Püschel M., Moura J. M. F. Algebraic Signal Processing Theory. *arXiv.* 2006. 67 p. (Препринт. cs/0612077). DOI: 10.48550/arXiv.cs/0612077.

2. Kovacevic J., Püschel M. Algebraic signal processing theory: Sampling for infinite and finite 1-d space. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2010. Vol. 58, № 1. P. 242–257.

3. Parada-Mayorga A., Ribeiro A. Algebraic Neural Networks: Stability to Deformations. *arXiv.* 2021. 20 p. (Препринт. 2009.01433 (cs)). DOI: 10.48550/arXiv.2009.01433.