УДК: 512.548

Фриз І. В., канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач кафедри інформаційних технологій,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПРО ІСНУВАННЯ ТОТАЛЬНО ПАРАСТРОФНО-ОРТОГОНАЛЬНИХ ТЕРНАРНИХ КВАЗІГРУП

Анотація. Вивчаються тернарні квазігрупи, які мають властивість парастрофної ортогональності. Знайдено порядки, для яких не існують тернарні асиметричні квазігрупи, всі парастрофи яких є потрійно ортогональними.

Ключові слова: тернарна квазігрупа, ортогональні операції, tор-квазігрупа.

Вступ. Застосування ортогональних n-арних операцій і квазігруп у різних галузях математики приводять до проблеми їх побудови. Деякі методи побудови запропоновані, наприклад, у [1] і [2]. Один із підходів, а саме побудова тотально парастрофно-ортогональних квазігруп, запропонований у [3] для бінарних квазігруп; для тернарних парастрофно-ортогональних і тотально парастрофно-ортогональних медіальних квазігруп такий підхід застосований у [4] і подальших дослідженнях авторів. Окрім знаходження необхідних і достаніх умов для того, щоб квазігрупа була парастрофно-ортогональною або тотально парастрофно-ортогональною, важливим є питання існування таких квазігруп.

Метою дослідження є знайти обмеження, що накладаються на порядок носія тернарних квазігруп, множина парастрофів яких є потрійно ортогональною.

Основний текст. Нехай Q – скінченна множина порядку m. Тернарна операція f, яка визначена на Q, називається *оборотною* або *квазігруповою,* якщо для довільних $a, b \in Q$ кожен з термів $f(x,a,b)$, $f(a,x,b)$, $f(a,b,x)$ визначає підстановку множини Q. Групоїд $(Q;f)$ називається *квазігрупою* порядку m.

Трійка тернарних операцій f_1, f_2, f_3, що визначені на Q, називається *ортогональною* [5], якщо для всіх $a, b, c \in Q$ система:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) = a, \\ f_2(x_1,x_2,x_3) = b, \\ f_3(x_1,x_2,x_3) = c \end{cases} \tag{1}$$

має єдиний розв'язок. Множина тернарних операцій $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_t\}$, де $t \geq 3$, називається *ортогональною*, якщо кожна трійка різних операцій із цієї множини є ортогональною.

Для кожної перестановки $\sigma \in S_4$, *σ-парастроф* ${}^{\sigma}f$ оборотної тернарної операції f визначається зі співвідношення:

$${}^{\sigma}f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = x_{4\sigma} :\Leftrightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_4.$$

σ-парастроф називається *i-м діленням*, якщо $\sigma = (i4)$.

Тернарна квазігрупа називається:

- *асиметричною*, якщо всі її парастрофи є попарно різними;
- *парастрофно-ортогональною*, якщо вона має 3 ортогональні парастрофи;

• *тотально парастрофно-ортогональною (top-квазігрупою)*, якщо всі її парастрофи є потрійно ортогональними.

Зазначимо, що асиметрична тернарна квазігрупа має 24 попарно різні парастрофи, тому побудувавши таку top-квазігрупу, отримаємо множину, що містить 24 потрійно ортогональні квазігрупи.

Нижче наведене твердження частково дає відповідь на питання щодо існування top-квазігруп певних порядків і є наслідком Теореми 2.7 із [1].

Теорема 1. Тернарні асиметричні top-квазігрупи порядку m не існують для $m < 22$.

Висновки. Проблема побудови парастрофно-ортогональних n-арних квазігруп у загальному випадку залишається відкритою. Навіть у тернарному випадку існування та побудова top-квазігруп потребує додаткових досліджень, зокрема і у випадку, коли група парастрофної симетрії квазігрупи не є тривіальною, тобто деякі парастрофи можуть збігатися.

Список використаних джерел

1. Ethier J. T., Mullen G. L. Strong forms of orthogonality for sets of hypercubes. *Discrete mathematics.* 2012. Vol. 312, iss. 12–13. P. 2050–2061. DOI: 10.1016/j.disc.2012.03.008.

2. Evans T. The construction of orthogonal k-skeins and latin k-cubes. *Aequationes mathematicae.* 1976. Vol. 14. P. 485–491. DOI: 10.1007/BF01835999.

3. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. Vol. 185, № 2. P. 184–191. DOI: 10.1007/s10958-012-0907-z.

4. Fryz I., Sokhatsky F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. Buletinul *Academiei de Stiinte a Republicii Moldova.* 2022. № 3(100). P. 41–55. DOI: 10.56415/basm.y2022.i3.p41.

5. Belyavskaya G. B., Mullen G. L. Orthogonal hypercubes and n-ary operations. *Quasigroups Related System.* 2005. Vol. 13. P. 73–76.